

**2229.** Egy  $r$  sugarú gömb köré írt kocka éle  $2r$ , az  $r$  sugarú gömbbe írt kocka éle  $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$ .

$$\underline{V_2 - V_1} = (2r)^3 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^3 = \frac{8(9 - \sqrt{3})}{9}r^3.$$

**2230.** Egy  $r$  sugarú gömb köré írt kocka éle  $2r$ , az  $r$  sugarú gömbbe írt kocka éle  $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$ .

$$\underline{A_2 - A_1} = 6(2r)^2 - 6\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 = \underline{16r^2}.$$

**2231.** Legyen a külső kocka éle  $a$ , a belső kocka éle  $b$ , a gömb sugara  $R$ . Tekintsük a négy él felezőpontjára illeszkedő síkmetszetet és az átlós síkmetszetet. A 2228/I. ábra és a 2228/II.

ábra jelöléseit használjuk:  $a = 2R$  és  $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ . A 2229. feladat alapján a két kocka térfogatának különbsége:  $V = V_2 - V_1 = \frac{8(9 - \sqrt{3})}{9}R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{9V}{8(9 - \sqrt{3})}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V(9 + \sqrt{3})}{26}}}}$ ;

$$a = \sqrt[3]{\frac{3V(9 + \sqrt{3})}{26}}; b = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt[3]{\frac{3V(9 + \sqrt{3})}{26}} = \sqrt[3]{\frac{(3\sqrt{3} + 1)V}{26}}.$$

**2232.** Legyen a gömb sugara  $R$ , a beírt kocka éle  $b$ , a körülírt kocka éle  $k$ . Tekintsük az átlós metszetet, ami  $b$  és  $b\sqrt{2}$  oldalú,  $2R$  átlójú téglalap, valamint a négy él felezőpontjára illeszkedő síkmetszetet, ami  $k = 2R$  oldalú négyzet. A beírt kocka testátlója az adott gömb egyik átmérője:

$$2R = b\sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow A_{\text{beírt kocka}} = 6 \cdot \frac{4R^2}{3} = 8R^2. \text{ A körülírt kocka éle egyenlő az adott gömb}$$

$$\text{átmérőjével: } 2R = k \Rightarrow A_{\text{körülírt kocka}} = 6 \cdot 4R^2 = 24R^2. \text{ A feltétel szerint } A_{\text{körülírt kocka}} - A_{\text{beírt kocka}} = F \Rightarrow 16R^2 = F \Rightarrow R = \frac{\sqrt{F}}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3F}}{6} \text{ és } k = \frac{\sqrt{F}}{2}.$$

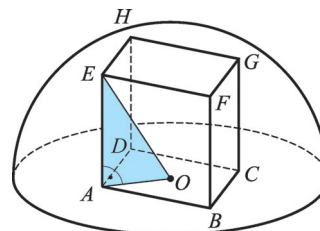
**2233.** Legyen a kocka éle  $a$ , a beírt gömb sugara  $r$ , a körülírt gömb sugara  $R$ . A beírt gömb sugara a kocka élének fele:  $r = \frac{a}{2}$ . A körülírt gömb sugara a kocka testátlójának fele:

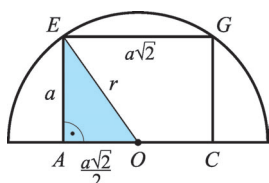
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ A feltétel szerint: } R - r = d \Rightarrow a = (\sqrt{3} + 1)d.$$

A kocka felszíne:  $A = 6 \cdot a^2 = 12(2 + \sqrt{3})d^2$ . A kocka térfogata:  $V = a^3 = 2(3\sqrt{3} + 5)d^3$ .

**2234.** Legyen a félgömbbe írt kocka éle  $a$ . Az átlós metszetet tekintve a félgömb sugara az  $EAO$  derékszögű háromszög átfogója. Pitagorasz-tétel szerint:  $a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow$

**2234/I.**



**2234/II.**

$$\Rightarrow \underline{a} = r \sqrt{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{r\sqrt{6}}{3}}}. \text{ A beírt kocka felszíne: } A = 6a^2 = 6 \cdot \frac{r^2 \cdot 6}{9} =$$

$$= \underline{4r^2}. \text{ A beírt kocka térfogata: } V = a^3 = \frac{r^3 \cdot 6 \cdot \sqrt{6}}{27} = \frac{2\sqrt{6}}{9} r^3.$$

**2235.** 2234/I. és 2234/II. ábra jelöléseivel: A félgömb sugara az ábrából kiemelt derékszögű háromszög átfogója. Pitagorasz-tétel a fenti háromszögre:  $r^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow r = a \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}} r$ . A kocka

$$\text{térfogata: } V = a^3 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} r^3 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{V}.$$

**2236.** A téglatest élei:  $a = x$ ,  $b = 2x$ ,  $c = 3x$ . A téglatest testátlója a köré írt gömb átmérője:  $4r^2 = a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + 4x^2 + 9x^2 \Rightarrow x = r \cdot \sqrt{\frac{2}{7}} = r \cdot \frac{\sqrt{14}}{7}$ . A téglatest élei:  $\underline{a = \frac{\sqrt{14}}{7} r}$ ,  $\underline{b = \frac{2\sqrt{14}}{7} r}$ ,  $\underline{c = \frac{3\sqrt{14}}{7} r}$ .

**2237.** A téglatest élei:  $a, b, c$ . Az oldallapok területei:  $t_1 = ab$ ,  $t_2 = bc$ ,  $t_3 = ac$ . A feltételek szerint:  $bc = 2ab$  és  $ac = 3ab \Rightarrow c = 2a = 3b \Rightarrow a = \frac{3}{2}b$ . A téglatest testátlója a köré írt gömb átmérője:  $(2r)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow 4r^2 = \frac{9}{4}b^2 + b^2 + 9b^2 \Rightarrow 4r^2 = \frac{49}{4}b^2 \Rightarrow b = \frac{4}{7}r$ ;  $\underline{a = \frac{6}{7}r}$ ;  $\underline{c = \frac{12}{7}r}$ .

**2238.** Legyen a négyzetes oszlop alapéle  $a$ , oldaléle  $b$ .  $s = 8a + 4b \Rightarrow b = \frac{s - 8a}{4}$ . A négyzetes oszlop testátlója a köré írt gömb átmérője:  $4r^2 = a^2 + a^2 + b^2 = 2a^2 + \frac{(s - 8a)^2}{16} \Rightarrow 96a^2 - 16as + s^2 - 64r^2 = 0$ . A másodfokú egyenlet diszkriminánsa:  $D = 64 \cdot (384r^2 - 2s^2)$ .

**1. eset:** nincs megoldás, ha  $384r^2 - 2s^2 < 0$ , azaz  $8 \cdot \sqrt{3} \cdot r < s$ .

**2. eset:** egy megoldás van, ha  $s = 8 \cdot \sqrt{3} r$ , ekkor  $\underline{a = b = \frac{s}{12}}$ , a négyzetes oszlop egy kocka.

**3. eset:** két megoldás lehet, ha  $s < 8 \cdot \sqrt{3} \cdot r$ . Ekkor  $\underline{a_{1,2}} = \frac{16s \pm 8 \cdot \sqrt{384r^2 - 2s^2}}{192} =$   
 $= \frac{2s \pm \sqrt{384r^2 - 2s^2}}{24}$  és  $\underline{b_{1,2}} = \frac{s \mp \sqrt{384r^2 - 2s^2}}{12}$ .

**2239.** Legyenek a téglatest egy csúcsba futó élei  $a, b$  és  $c$ . A feltétel szerint  $4a + 4b + 4c = s$ . A téglatest testátlója a köré írt gömb átmérője:  $4r^2 = a^2 + b^2 + c^2$ .  $4r^2 = (a + b + c)^2 -$

$$- 2(ab + bc + ac) = \left(\frac{s}{4}\right)^2 - 2(ab + bc + ac) \Rightarrow 2(ab + bc + ac) = \left(\frac{s}{4}\right)^2 - 4r^2. \text{ A téglatest felszí-}$$

$$\text{ne: } A = 2ab + 2bc + 2ac = \frac{s^2}{16} - 4r^2 = \underline{\underline{\frac{s^2 - 64r^2}{16}}}. \text{ Nincs ilyen téglatest, ha } s \leq 8r.$$

**2240.** Legyenek a téglatest egy csúcsba futó élei  $a$ ,  $b$  és  $c$ ; a köré írt gömb sugara pedig  $R$ . A feltétel szerint  $4a + 4b + 4c = 4(a + b + c) = s$  és  $2ab + 2bc + 2ac = F$ .  $\frac{s^2}{16} = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = a^2 + b^2 + c^2 + F$ . A gömb átmérője a téglatest testátlója:  $(2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ . A fentieket egybevetve  $(2R)^2 = \frac{s^2}{16} - F \Rightarrow R = \frac{\sqrt{s^2 - 16F}}{8}$ . Nincs ilyen téglatest, ha  $s \leq 4\sqrt{F}$ .

**2241.** Az 1837. feladatban, valamint az 1838. feladatban bizonyítottuk:

Az  $a$  élű szabályos tetraéder köré írható gömb sugara  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ ; az  $a'$  élű szabályos tetraéderbe írt gömb sugara  $\frac{a'\sqrt{6}}{12}$ . A fentieket felhasználva: az  $R$  sugarú gömb köré írt szabályos tetraéder éle  $a' = \frac{12R}{\sqrt{6}}$ . Az  $R$  sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder éle  $a = \frac{4R}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3} a'$ . Bármely két szabályos tetraéder hasonló, a térfogatarány kiszámítható a  $V:V' = (a:a')^3$  arány alapján.  $V:V' = \left(\frac{1}{3} a':a'\right)^3 = (1:3)^3$ . Egy gömbbe és a gömb köré írt szabályos tetraéderek térfogatának aránya 1 : 27.

**2242.** Legyen a gömb sugara  $R$ , az oktaéder éle  $a$ , a tetraéder éle  $b$ . A szabályos oktaéder két átellenes csúcsának távolsága a köré írt gömb átmérője. Tekintsük az oktaéder négy oldalélére illeszkedő síkmetszetét, ami négyzet:  $(2R)^2 = 2a^2 \Rightarrow a = R\sqrt{2}$ . Az oktaéder térfogata két egy-

bevágó szabályos négyoldalú gúla térfogatának összege:  $V = 2 \cdot \frac{a^2 R}{3} = \frac{4}{3} R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4}}$ .

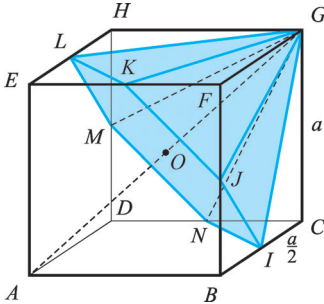
A  $b$  élű szabályos tetraéder köré írt gömb sugara az 1837. feladat alapján:  $R = \frac{\sqrt{6} b}{4} \Rightarrow b = \frac{2\sqrt{6}}{3} R$  a tetraéder éle. A  $b$  élű szabályos tetraéder magassága  $\frac{b\sqrt{6}}{3}$ , térfogata:

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} b^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \left( \frac{2\sqrt{6}}{3} R \right)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{27} R^3 \Rightarrow \underline{V_t} = \frac{8\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{3V}{4} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{9} V}}$$

**2243.** Felhasználjuk az 1837. feladat és az 1838. feladat eredményeit: az  $R$  sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder éle  $a = \frac{4}{\sqrt{6}} R$ . Az  $a$  élű szabályos tetraéderbe írt gömb sugara

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} a = \frac{1}{3} R. \text{ Bármely két gömb hasonló, ezért: } A_R : A_r = (R : r)^2 = \underline{\underline{9 : 1}}$$

**2244.** Legyen az  $r$  sugarú gömbbe írt kocka éle  $a$ , ebbe a kockába írt gömb sugara  $\rho$ , a  $\rho$  sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder éle pedig  $b$ . Az  $r$  sugarú gömbbe írt kocka testátlója a gömb átmérője.  $\Rightarrow 2r = a\sqrt{3}$ . Az  $a$  élű kockába írt gömb sugara a kocka élének fele.  $\Rightarrow \rho = \frac{a}{2} = \frac{r}{\sqrt{3}}$ .

**2246.**

A  $\varrho$  sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder éle (l. 1837. feladat)

$$b = \frac{4\varrho}{\sqrt{6}} = \frac{4r}{3\sqrt{2}}. \text{ A } b \text{ élű szabályos tetraéder felszíne és térfoga: } A = \sqrt{3} \cdot b^2 \Rightarrow A = \frac{8\sqrt{3}}{9} r^2 \text{ és } V = \frac{\sqrt{2}}{12} b^3 \Rightarrow V = \frac{8}{81} r^3.$$

**2245.** Legyen az  $a$  élű kocka köré írt gömb sugara  $r$ , e köré a gömb köré írt szabályos tetraéder éle  $b$ , a tetraéder köré írt gömb sugara  $R$ , végül az  $R$  sugarú gömb köré írt szabályos oktaéder éle  $c$ . Az  $r$  sugarú gömbbe írt kocka testátlója a gömb átmérője.  $\Rightarrow 2r = a\sqrt{3}$ . Az  $a$  élű kocka köré írt gömb sugara

feleakkora, mint a kocka testátlója.  $\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ . Az  $r$  sugarú

gömb köré írt szabályos tetraéder éle (l. 1838. feladat):  $b = \frac{12}{\sqrt{6}} r$ . A  $b$  élű szabályos tetraéder

köré írt gömb sugara (l. 1837. feladat):  $R = \frac{\sqrt{6}}{4} b$ . Az  $R$  sugarú gömb köré írt szabályos

oktaéder éle (l. 1917. feladat):  $c = \sqrt{6}R$ . A  $c$  élű szabályos oktaéder térfoga (l. 2242. feladat):

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} c^3. \Rightarrow V = \frac{243}{2} a^3.$$

**2246.** Felhasználjuk az 1691. feladat, az 1695. feladat és az 1692. feladat eredményeit. Az ábra jelöléseivel:  $I; J; K; L; M$  és  $N$  élfelező pontok egy síkban vannak. Síkjuk merőlegesen felezi a testátlót;  $IJKLMN$  szabályos hatszög;  $GI = GJ = \dots = GN = AI = AJ = \dots = AN$ . Az  $IJKLMNG$

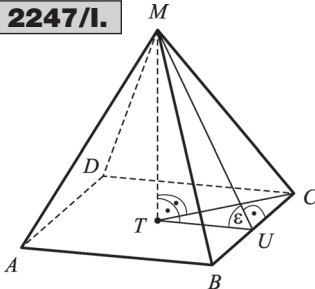
test olyan szabályos hatszög alapú szabályos gúla, aminek a magassága  $GO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , alapéle

$IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , oldaléle  $GI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$  és oldallapjainak magassága  $\frac{3a}{2\sqrt{2}}$ . A keresett gömb, amely

érinti a kocka három lapját és a metsző síkot, éppen a szabályos hatszög alapú gúla alá beírható ( $\varrho$  sugarú) gömb, hiszen a gúla alaplapját és három oldallapját érinti.

$$V_{\text{gúla}} = \frac{A_{\text{gúla}} \cdot \varrho}{3} \Rightarrow \varrho = \frac{3V_{\text{gúla}}}{A_{\text{gúla}}}. \quad V_{\text{gúla}} = \frac{1}{3} \cdot T_a \cdot m = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot T_{\text{MO}} \cdot GO = \frac{3}{8} a^3. \quad A_{\text{gúla}} = T_a + 6T_{\text{MO}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + 9}{4} a^2. \Rightarrow \varrho = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} a.$$

**2247/I.**

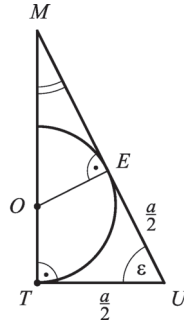
**2247.** Legyen a gúla alapéle  $a$ , magassága  $m$ , köré írt gömbjének sugara  $R$ , beírt gömbjének sugara  $r$ , az oldallap és az alaplap hajlásszöge  $\varepsilon$ . Tekintsük a gúlának az alapél felező-

merőleges síkjával vett metszetét (2247/II. ábra).  $\frac{2m}{a} = \text{tg } \varepsilon$ .

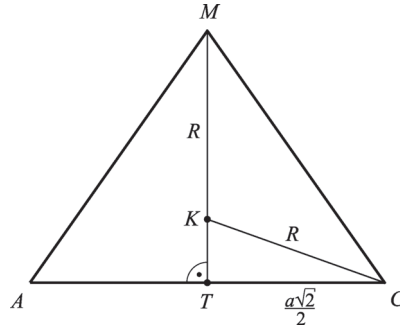
Pitagorasz-tétel az  $MTU$  derékszögű háromszögben:

$$MU^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2. \quad MOE\Delta \sim MUT\Delta, \text{ mert szögeik páronként}$$

2247/II.



2247/III.



egyenlők.  $\Rightarrow \frac{m-r}{r} = \frac{MU}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow r = \frac{ma}{\sqrt{4m^2 + a^2} + a}$ . Tekintsük az oldalélt tartalmazó tengelymetszetet (2247/III. ábra). Pitagorasz-tétel a  $KTC$  derékszögű háromszögben:

$KT^2 = R^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$  és  $m = R + KT \Rightarrow m - R = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}} \Rightarrow R = \frac{m}{2} + \frac{a^2}{4m}$ . A feladat feltételei

szerint:  $R = 3r \Rightarrow \frac{m}{2} + \frac{a^2}{4m} = \frac{3ma}{\sqrt{4m^2 + a^2} + a} \Rightarrow \frac{10\frac{m^2}{a^2} - 1}{2\frac{m^2}{a^2} + 1} = \sqrt{4\frac{m^2}{a^2} + 1}$ . Ebből  $\frac{2m}{a} = \operatorname{tg} \varepsilon = x$

(ahol  $x > 0$ , mert  $0 < \varepsilon < 90^\circ$ , hiszen két sík hajlásszöge) jelölést felhasználva:  $\frac{5x^2 - 2}{x^2 + 2} = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow 0 = x^6 - 20x^4 + 28x^2 = x^2(x^4 - 20x^2 + 28)$ . Az egyenlet pozitív megoldásai:  $x_1 = \sqrt{10 + 6\sqrt{2}} = \operatorname{tg} \varepsilon_1$  és  $x_2 = \sqrt{10 - 6\sqrt{2}} = \operatorname{tg} \varepsilon_2 \Rightarrow \underline{\varepsilon_1 \approx 76,91^\circ}$ , illetve  $\underline{\varepsilon_2 \approx 50,91^\circ}$ .

**2248.** Felhasználjuk, hogy az  $R$  sugarú gömbbe írt egyenlő oldalú henger átmérője:  $a = \frac{2R}{\sqrt{2}}$ ;

az  $R$  sugarú gömbbe írt egyenlő oldalú kúp alkotója:  $b = \sqrt{3}R$ .

a)  $A_{\text{henger}} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi + 2\left(\frac{a}{2}\right) \pi a = 3\pi R^2$ .  $A_{\text{gömb}} = 4\pi R^2$ .  $A_{\text{kúp}} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi + \left(\frac{b}{2}\right) \pi b = \frac{9\pi}{4} R^2$ .

$\underline{A_{\text{henger}}} = 3\pi R^2 = \sqrt{4\pi R^2 \cdot \frac{9\pi}{4} R^2} = \sqrt{A_{\text{gömb}} \cdot A_{\text{kúp}}} \Rightarrow$  A henger felszíne mértani közepe a gömb

és a kúp felszínének. b)  $V_{\text{henger}} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi a = \frac{\pi}{\sqrt{2}} R^3$ .  $V_{\text{gömb}} = \frac{4\pi}{3} R^3$ .  $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi \cdot \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right) =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{24} \pi b^3 = \frac{3\pi}{8} R^3. \quad \underline{V_{\text{henger}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} R^3 = \sqrt{\frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{3\pi}{8} R^3} = \sqrt{V_{\text{gömb}} \cdot V_{\text{kúp}}} \Rightarrow \text{A henger térfogata}$$

mértani közepe a gömb és a kúp térfogatának.

**2249.** Felhasználjuk, hogy az  $R$  sugarú gömb köré írt egyenlő oldalú henger átmérője:  $a = 2R$ ; az  $R$  sugarú gömb köré írt egyenlő oldalú kúp alkotója:  $b = 2 \cdot \sqrt{3}R$ .

$$a) \quad A_{\text{henger}} = 2 \left( \frac{a}{2} \right)^2 \pi + 2 \left( \frac{a}{2} \right) \pi a = 6\pi R^2. \quad A_{\text{gömb}} = 4\pi R^2. \quad A_{\text{kúp}} = \left( \frac{b}{2} \right)^2 \pi + \left( \frac{b}{2} \right) \pi b = 9\pi R^2.$$

$\underline{A_{\text{henger}}} = 6\pi R^2 = \sqrt{4\pi R^2 \cdot 9\pi R^2} = \sqrt{A_{\text{gömb}} \cdot A_{\text{kúp}}} \Rightarrow \text{A henger felszíne mértani közepe a gömb és a kúp felszínének.}$

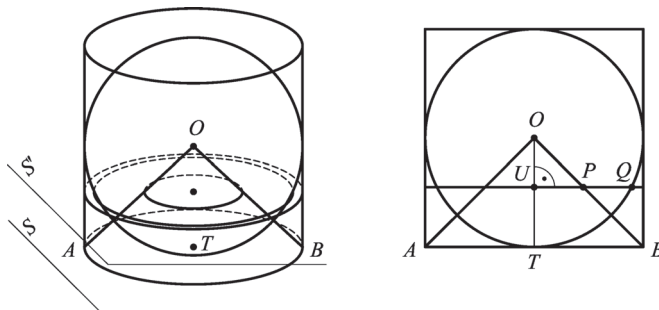
$$b) \quad V_{\text{henger}} = \left( \frac{a}{2} \right)^2 \pi a = 2\pi R^3. \quad V_{\text{gömb}} = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{b}{2} \right)^2 \pi \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = 3\pi R^3. \quad \underline{V_{\text{henger}}} = 2\pi R^3 =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{3} R^3 \cdot 3\pi R^3} = \sqrt{V_{\text{gömb}} \cdot V_{\text{kúp}}} \Rightarrow \text{A henger térfogata mértani közepe a gömb és a kúp térfogatának.}$$

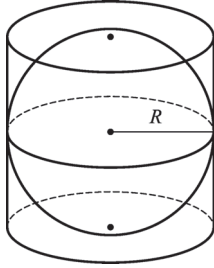
**2250.** Legyen a metsző sík  $d$  távolságra az  $O$  középponttól. Legyen a gömb sugara  $R$ , ekkor a henger átmérője  $2R$ . Tekintsük a henger egyik tengelymetszetét.  $OT = TB = R$ , mert  $ABO\Delta$  egyenlő szárú derékszögű háromszög.  $OUP\Delta \sim OTB\Delta \Rightarrow OU = UP = d$ , azaz a kúp síkmetszet körének sugara  $d$ . Pitagorasz-tétel az  $OUQ$  derékszögű háromszögben:  $UQ^2 + d^2 = R^2 \Rightarrow$  A gömb síkmetszet körének sugara  $\sqrt{R^2 - d^2}$ . A henger síkmetszet körének sugara  $R$ . A síkmetszetek területe:  $T_{\text{kúp}} = d^2\pi$ ,  $T_{\text{gömb}} = \left( \sqrt{R^2 - d^2} \right)^2 \pi = (R^2 - d^2)\pi$ ,  $T_{\text{henger}} = R^2\pi$ . Tehát fennáll a  $T_{\text{kúp}} + T_{\text{gömb}} = T_{\text{henger}}$  egyenlőség.

**2251.** A gömb köré írt poliéder minden lapjára olyan gúlát állítunk, amelynek az alaplappal szemközti csúcsa a gömb középpontja. Ezek a gúlák egyszeresen és hézagmentesen kitéltik a poliédert, így térfogatösszegük egyenlő a poliéder térfogatával. Legyen a gúlák alapterülete  $t_i$ , magassága  $r$ .  $V_{\text{poliéder}} = \frac{1}{3} t_1 r + \frac{1}{3} t_2 r + \dots + \frac{1}{3} t_n r = \frac{1}{3} r \cdot (t_1 + t_2 + \dots + t_n) = \frac{1}{3} r \cdot A_{\text{poliéder}}$ , hiszen

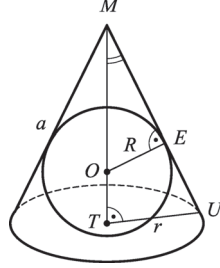
### 2250.



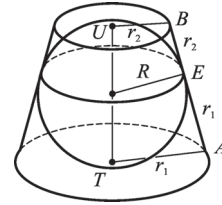
2252/I.



2252/II.



2252/III.



a gúlák alaplapjainak területösszege éppen a poliéder felszíne.  $V_{\text{poliéder}} = \frac{1}{3} r \cdot A_{\text{poliéder}} \Rightarrow A$  fel-  
szín és a térfogat aránya adott  $r$  sugarú gömb esetén állandó:  $\frac{A_{\text{poliéder}}}{V_{\text{poliéder}}} = \frac{3}{r}$ .

**2252.** Adott  $R$  sugarú gömb köré egyféle egyenes körhenger írható:  $A_{\text{henger}} = 2R^2\pi + 2R\pi \cdot 2R = 6R^2\pi$ .  $V_{\text{henger}} = R^2\pi \cdot 2R = 2R^3\pi$ .  $A_{\text{henger}} : V_{\text{henger}} = 6R^2\pi : 2R^3\pi = \underline{\underline{3:R}}$ . Adott  $R$  sugarú gömb köré írt egyenes körkúpok esetén:  $MOE\Delta \sim MUT\Delta$ , mert szögeik egyenlők  $\Rightarrow \frac{MO}{OE} = \frac{MU}{TU} \Rightarrow \frac{MT-R}{R} = \frac{MU}{r} \Rightarrow \frac{m-R}{R} = \frac{a}{r} \Leftrightarrow \frac{a+r}{mr} = \frac{1}{R}$ .  $A_{\text{kúp}} = r^2\pi + r\pi a$ .  $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot m$ .

$A_{\text{kúp}} : V_{\text{kúp}} = (r^2\pi + r\pi a) : \left(\frac{1}{3} r^2\pi m\right) = (r+a) : \left(\frac{1}{3} rm\right) = \underline{\underline{3:R}}$ . Adott  $R$  sugarú gömb köré írt

egyenes csonkakúpok esetén: a csonkakúp alkotója  $a = r_1 + r_2$ , magassága  $m = 2R$ .

$$A_{\text{csonkakúp}} = \pi [r_1^2 + a(r_1 + r_2) + r_2^2] = 2\pi (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

$$V_{\text{csonkakúp}} = \frac{1}{3} \pi m (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{2\pi R}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

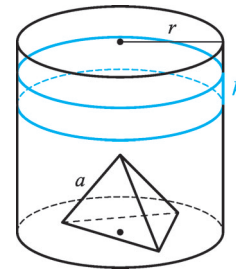
$$\frac{A_{\text{csonkakúp}}}{V_{\text{csonkakúp}}} = \frac{2\pi (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{\frac{2\pi R}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} = \underline{\underline{3:R}}.$$

Mind egyik esetben  $A : V = 3 : R$ .

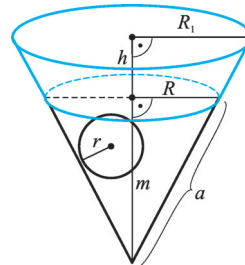
**2253.** a)  $V_1 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = r^2\pi h \Rightarrow h = \frac{125\sqrt{2}}{12 \cdot 16 \cdot \pi} \approx \underline{\underline{0,29 \text{ cm}}}$ . b) 2 dm átmérőjű hengerben 8 dm magasságig víz van.  $\Rightarrow$  Belefér a gömb a vízbe, ezért  $V_{\text{víz}} = 1^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{9}{16} \pi = V_{\text{gömb}} \Rightarrow h = \frac{9}{16} = 0,56$ . A vízszint 0,56 dm-t emelkedik és 8,56 dm magasan fog állni.

**2254.** Egyenlő oldalú kúp:  $a = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{3} m$ . Hasonlóság miatt:  $R_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} (m+h)$ . A gömb térfogata egyenlő a két kúp térfogatának

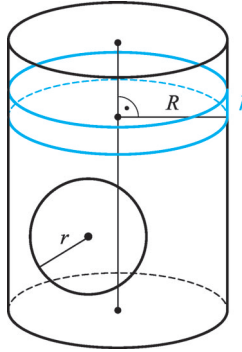
2253.



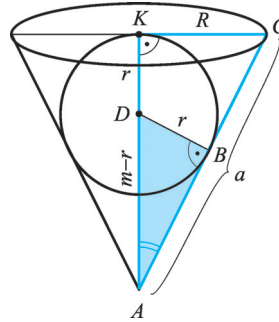
2254.



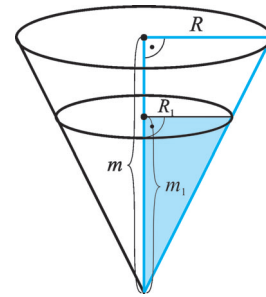
2255.



2256.



2257.



különbségével:  $\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{3}R_1^2 \cdot (m+h)\pi - \frac{1}{3}R^2 m\pi \Rightarrow 4r^3 = \frac{1}{3}(m+h)^3 - \frac{1}{3}m^3 \Rightarrow 12r^3 + m^3 = (m+h)^3 \Rightarrow h = \sqrt[3]{12r^3 + m^3} - m$ .

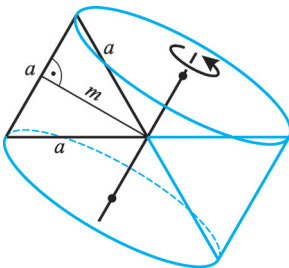
**2255.**  $\frac{4}{3}r^3\pi = R^2\pi h \Rightarrow r^3 = \frac{3}{4}R^2h \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{75}{4}} \Rightarrow 2r \approx \underline{\underline{5,3 \text{ cm}}}$ .

**2256.** Egyenlő oldalú kúp:  $a = 2R \Rightarrow m = \sqrt{3}R$ .  $AKC\Delta \sim ABD\Delta \Rightarrow KC : AC = DB : DA \Rightarrow m - r = 2r \Rightarrow m = 3r$ , azaz  $\sqrt{3} \cdot R = 3r \Rightarrow R = \sqrt{3}r$ . A szükséges víz térfogata:  $V = V_k - V_g = \frac{1}{3}R^2\pi m - \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{5}{3}r^3\pi \Rightarrow V \approx \underline{\underline{41,89 \text{ cm}^3}}$ .

**2257.** A 2256. ábra jelöléseit használva az egyenlő oldalú kúpra:  $a = 2R \Rightarrow m = \sqrt{3}R$ .  $AKC\Delta \sim ABD\Delta \Rightarrow KC : AC = DB : DA \Rightarrow m - r = 2r \Rightarrow m = 3r$ , azaz  $\sqrt{3}R = 3r \Rightarrow R = \sqrt{3}r$ . A beleöntött víz térfogata:  $V = V_k - V_g = \frac{1}{3}R^2\pi m - \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{5}{3}r^3\pi$ . Hasonlóság miatt:  $R : m = R_1 : m_1 \Rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}m_1$ .  $V = \frac{1}{3}R_1^2 \cdot \pi m_1 = \frac{5}{3}r^3\pi \Rightarrow m_1 = \underline{\underline{r \cdot \sqrt[3]{15}}}$ .

### Síkidomok forgatásával nyert testek

2259.



**2258.** A keletkezett test két darab  $m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$  sugarú,  $\frac{a}{2}$  magasságú kútból áll.  $V = 2V_k = \frac{a^3\pi}{4}$ .  $A = 2t_p = \sqrt{3}a^2\pi$ .

**2259.**  $m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$ . A keletkezett testet megkapjuk, ha egy hengerből kivesszünk két kúpot.

$V = V_h - 2V_k = \frac{1}{2} \cdot a^3\pi \Rightarrow V \approx \underline{\underline{6434 \text{ cm}^3}}$ .

$A = 2 \cdot t_{kp} + t_{hp} = 2\sqrt{3}a^2\pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{2786 \text{ cm}^2}}$ .

**2260.** Legyen a háromszög alaphoz tartozó magassága  $m_1$ , a szárhoz tartozó magassága  $m_2$ . A háromszög hegyesszögű. Az alap körül forgatva két egybevágó, közös alapkörű kúp keletkezik. Sugaruk  $m_1$ , alkotójuk 25 cm, magasságuk 15 cm. A szár körül forgatva két közös alapkörű kúp adódik. Sugaruk  $m_2$ , magasságuk  $x$  cm, illetve  $(25 - x)$  cm, alkotójuk 25 cm, illetve 30 cm.

$$am_1 = bm_2. \quad V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} m_1^2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} m_1^2 \cdot \pi \cdot a \quad \text{és} \quad V_2 = \frac{1}{3} m_2^2 \cdot \pi x + \frac{1}{3} m_2^2 \cdot \pi (b - x) = \frac{1}{3} m_2^2 \cdot \pi b = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{b} m_1^2 \cdot \pi \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{a} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

$$A_1 = 2m_1 b \pi \quad \text{és} \quad A_2 = m_2 b \pi + m_2 a \pi = m_2 (a + b) \pi = \frac{a}{b} m_1 (a + b) \pi \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{2b^2}{a(a+b)} = \underline{\underline{\frac{33}{5}}}$$

**2261.** A háromszög hegyesszögű  $\Rightarrow$  a keletkezett két kúp az alapkör síkjának két oldalán van.

$$m = b \cdot \sin \alpha. \quad V = \frac{1}{3} m^2 \cdot \pi x + \frac{1}{3} m^2 \cdot \pi (c - x) = \frac{1}{3} \cdot (b \cdot \sin \alpha)^2 \cdot \pi c \Rightarrow V \approx \underline{\underline{188,3 \text{ dm}^3}}$$

$$A = m a \pi + m b \pi = m(a + b) \pi \quad \text{és} \quad \text{koszinusztételből } a\text{-t kiszámolhatjuk: } a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cos \alpha \Rightarrow \Rightarrow A \approx \underline{\underline{218,3 \text{ dm}^2}}$$

**2262.** Tekintsük a 2261. ábrát. A háromszög tompaszögű, így leghosszabb oldala körül forgatva a keletkezett két kúp az alapkör síkjának két oldalán van. Az  $ABC\Delta$  területe:  $\frac{1}{2} m c =$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \Rightarrow m \approx 22,47 \text{ cm.} \quad V = \frac{1}{3} m^2 \cdot \pi x + \frac{1}{3} m^2 \cdot \pi (c - x) = \frac{1}{3} \cdot m^2 \cdot \pi c \Rightarrow \Rightarrow V \approx \underline{\underline{32,25 \text{ dm}^3}}. \quad A = m b \pi + m a \pi = m(a + b) \pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{53,65 \text{ dm}^2}}$$

**2263.** Tekintsük a 2261. ábrát. Két forgáskúp keletkezik, a közös alapkör síkjának két oldalán.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = 5,69 \text{ dm.} \quad \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} c \cdot m \Rightarrow m \approx 2,11 \text{ dm.} \quad V = \frac{1}{3} m^2 \cdot \pi x + \frac{1}{3} m^2 \cdot \pi (c - x) = \frac{1}{3} \cdot m^2 \cdot \pi c \Rightarrow V \approx \underline{\underline{26,56 \text{ dm}^3}}. \quad A = m b \pi + m a \pi = m(a + b) \pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{49,78 \text{ dm}^2}}$$

**2264.** Két egybevágó, közös alapkörű kúp adódik. Sugaruk  $b$ , magasságuk  $\frac{a}{2}$ , alkotójuk:

$$c = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}. \quad V = 2 \cdot \frac{1}{3} b^2 \pi \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} ab^2 \pi \quad \text{és} \quad A = 2bc \pi = b \sqrt{4b^2 + a^2} \cdot \pi$$

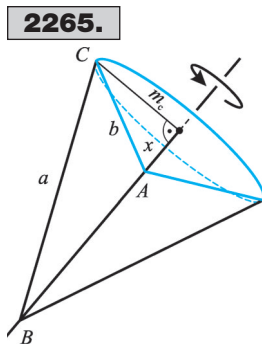
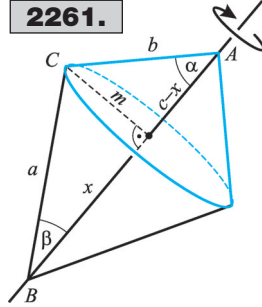
**2265.** Három eset lehetséges: **I.**  $\alpha, \beta$  hegyesszög  $\Rightarrow V_c = \frac{1}{3} m_c^2 \pi c$ ,

ahogy azt a 2261. ábra alapján a 2261. feladatban kiszámoltuk. **II.**  $\alpha$  tompaszög: 2265. ábra  $\Rightarrow V_c = \frac{1}{3} m_c^2 \pi (c + x) - \frac{1}{3} m_c^2 \pi x = \frac{1}{3} m_c^2 \pi c$ .

$$\text{III. } \alpha \text{ derékszög } V_c = \frac{1}{3} m_c^2 \pi c. \quad 2t = m_a \cdot a = m_b \cdot b = m_c \cdot c. \Rightarrow$$

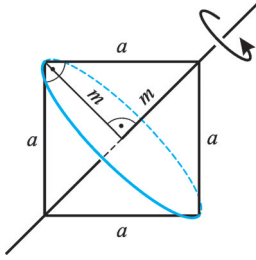
$$\Rightarrow V_a = \frac{1}{3} m_a^2 \pi a = \frac{1}{3} \cdot m_a \cdot 2t \cdot \pi \quad \text{és} \quad V_b = \frac{1}{3} \cdot m_b \cdot 2t \cdot \pi \quad \text{és}$$

$$V_c = \frac{1}{3} \cdot m_c \cdot 2t \cdot \pi \Rightarrow V_a : V_b : V_c = \underline{\underline{m_a : m_b : m_c}}$$

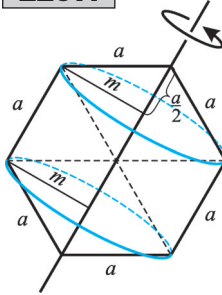




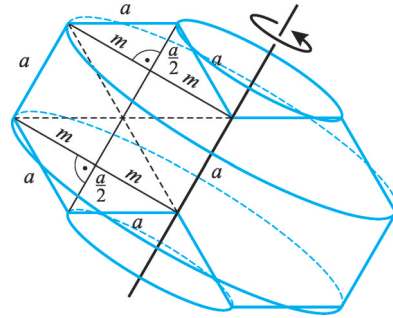
2266.



2267.



2268.



**2266.**  $m = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ .  $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot m^2 \pi m = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a^3 \pi$ .  $A = 2t_p = 2ma\pi = \sqrt{2}a^2 \pi$ .

**2267.**  $m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ .  $V = 2V_k + V_h = 2 \cdot \frac{1}{3} m^2 \pi \cdot \frac{a}{2} + m^2 \pi a = a^3 \pi \Rightarrow V \approx 3141,6 \text{ cm}^3$ .  
 $A = 2t_{kp} + t_{hp} = 2ma\pi + 2ma\pi = 2\sqrt{3}a^2 \pi \Rightarrow A \approx 1088,3 \text{ cm}^2$ .

**2268.**  $m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ .  $V = V_h + 2V_{csk} - 2V_k = (2m)^2 \pi a + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot [(2m)^2 + m^2 + 2m \cdot m] \pi - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot m^2 \pi \cdot \frac{a}{2} = \frac{9}{2} a^3 \pi$ .  $A = t_{hp} + 2t_{cskp} + 2t_{kp} = 2(2m)\pi a + 2 \cdot 3ma\pi + 2ma\pi = 6\sqrt{3}a^2 \pi$ .

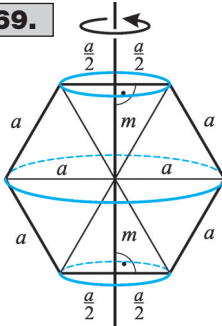
**2269.**  $m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ .  $V = 2V_{csk} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[ a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a \cdot \frac{a}{2} \right] m \pi = \frac{7\sqrt{3}}{12} a^3 \pi$ .

$A = 2t_{cskp} + 2t_f = 2 \cdot \left( a + \frac{a}{2} \right) \cdot a \pi + 2 \cdot \left( \frac{a}{2} \right)^2 \pi = \frac{7}{2} a^2 \pi$ .

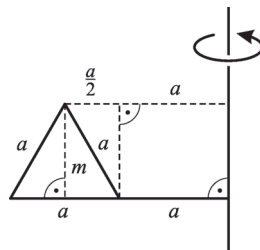
**2270.**  $V = \frac{1}{3} \cdot \left[ (2a)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + 2a \cdot \frac{3a}{2} \right] \cdot m \pi - \frac{1}{3} \cdot \left[ \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + a^2 + \frac{3}{2} a \cdot a \right] \cdot m \pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^3 \pi$ .

**2271.**  $b_2 = 0,5b \Rightarrow b_1 + b_3 = 0,5b$ .  $AE = EB$  és  $CF = FB \Rightarrow EF \parallel AC$  és  $2EF = AC \Rightarrow ABC\Delta \sim \sim EBF\Delta$  és a hasonlóság aránya 2  $\Rightarrow PB = 2QB \Rightarrow PQ = QB = m$ .  $AEFC$  forgatásából:

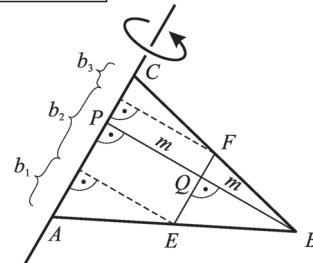
2269.



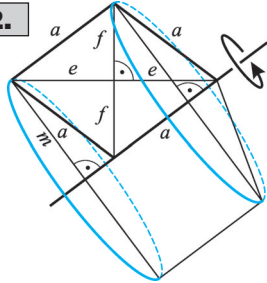
2270.



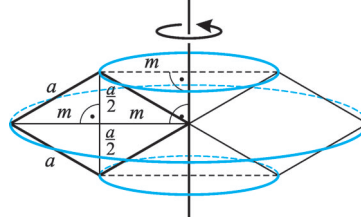
2271.



2272.



2273.



$$V_1 = \frac{1}{3}m^2\pi b_3 + m^2\pi b_2 + \frac{1}{3}m^2\pi b_1 = \frac{1}{3}m^2\pi \cdot \frac{b}{2} + m^2\pi \cdot \frac{b}{2} = \frac{2}{3}m^2\pi b. \quad EBF\Delta \text{ forgatásából:}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}(2m)^2b\pi - V_1 = \frac{4}{3}m^2b\pi - \frac{2}{3}m^2b\pi = \frac{2}{3}m^2b\pi \Rightarrow \underline{V_1 : V_2 = 1 : 1.}$$

**2272.**  $a^2 = f^2 + e^2 \Rightarrow f = 15 \text{ cm}$ ;  $t_{\text{rombusz}} = 2f \cdot e = a \cdot m \Rightarrow m = 24 \text{ cm}$ . A keletkezett test térfogata megegyezik egy  $m$  sugarú és  $a$  magasságú henger térfogatával:  $V = m^2\pi a \Rightarrow V \approx \underline{45,24 \text{ dm}^3}$ .  
 $A = t_{\text{hp}} + 2t_{\text{kp}} = 2m\pi a + 2ma\pi = 4ma\pi \Rightarrow A \approx \underline{75,4 \text{ dm}^2}$ .

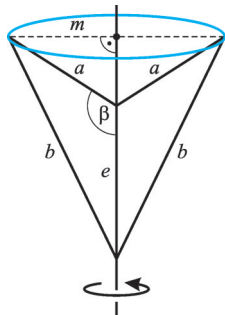
**2273.**  $V = 2 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \{ (2m)^2 + m^2 + 2m \cdot m \} \cdot \frac{a}{2} \cdot \pi - \frac{1}{3} m^2 \pi \cdot \frac{a}{2} \right] = \frac{3}{2} a^3 \pi. \quad A = 2t_{\text{cskp}} + 2t_{\text{kp}} =$   
 $= 2 \cdot (2m + m) \cdot a\pi + 2ma\pi = \underline{4\sqrt{3}a^2\pi}.$

**2274.**  $V_a = m_a^2\pi a$  és  $V_b = m_b^2\pi b. \quad \frac{V_a}{V_b} = \frac{m_a^2\pi a}{m_b^2\pi b} = \frac{m_a^2 a}{m_b^2 b} = \frac{t \cdot m_a}{t \cdot m_b} = \frac{m_a}{m_b} = \frac{\frac{t}{a}}{\frac{t}{b}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \underline{\frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}}$ .

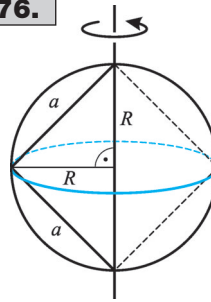
**2275.** Az adatok egy konkáv deltoidot adnak meg, mert  $54^2 + 61^2 = 6637 < 7569 = 87^2 \Rightarrow \beta$  tompaszög.  $\frac{1}{2}me = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)} \Rightarrow m \approx 60,4 \text{ cm}. \quad V = \frac{1}{3}m^2\pi(e+x) - \frac{1}{3}m^2\pi x =$   
 $= \frac{1}{3}m^2\pi e \Rightarrow V \approx \underline{206,3 \text{ dm}^3}. \quad A = mb\pi + ma\pi = m(a+b)\pi \Rightarrow A \approx \underline{280,8 \text{ dm}^2}.$

**2276.**  $a = \sqrt{2}R. \quad V_g = \frac{4}{3}R^3\pi$  és  $V = 2 \cdot \frac{1}{3}R^2\pi \cdot R = \frac{2}{3}R^3\pi. \quad \frac{V}{V_g} = \frac{1}{2}. \quad A_g = 4R^2\pi$  és  $A = 2 \cdot Ra\pi$   
 $= 2\sqrt{2}R^2\pi \Rightarrow \frac{A}{A_g} = \frac{2\sqrt{2}R^2\pi}{4R^2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

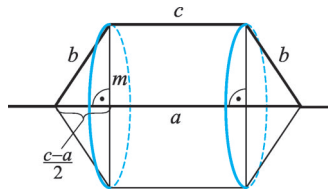
2275.



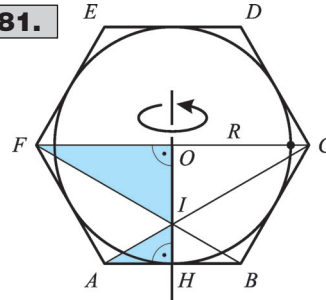
2276.



2277.



2281.



**2277.**  $m = 24$  cm.  $V = V_h + 2V_k \approx \underline{48,26 \text{ cm}^3}$ .  $A = t_{hp} + 2t_{kp} \approx \underline{69,37 \text{ cm}^2}$ .

**2278.** A keletkezett test egy forgáshenger és egy forgáskúp a közös körlapjuk két oldalán.  $V \approx \underline{142,5 \text{ dm}^3}$ .  $A \approx \underline{152,7 \text{ dm}^2}$ .

**2279.** A körülírt kör sugara  $\frac{2}{3}$ -a a háromszög magasságának.  $\frac{V_g}{V_k} = \underline{\underline{\frac{32}{9}}}$ .

**2280.** A beírt kör sugara  $\frac{1}{3}$ -a a háromszög magasságának.  $\frac{V_g}{V_k} = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$ .

**2281.**  $ABC \sphericalangle = 120^\circ \Rightarrow LAH \sphericalangle = 30^\circ \Rightarrow 2 \cdot IH = AI$  és  $AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AI$ .  $FOI\Delta \cong COI\Delta \sim \sim AHI\Delta$  ( $\lambda = 2$ )  $\Rightarrow 2IO = FI$  és  $FO = \frac{\sqrt{3}}{2} FI$ .  $FO = AB = 2AH \Rightarrow 2IH = IO \Rightarrow IH = \frac{1}{3} R$  és

$$IO = \frac{2}{3} R \Rightarrow AI = \frac{2}{3} R; \quad AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} R = \frac{\sqrt{3}}{3} R; \quad FI = \frac{4}{3} R; \quad FO = \frac{2\sqrt{3}}{3} R.$$

$$V_{FOI} = \frac{1}{3} FO^2 \cdot \pi \cdot IO = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} R \right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} R = \underline{\underline{\frac{8}{27} R^3 \pi}} \quad \text{és} \quad V_{AIH} = \frac{1}{8} V_{FOI} = \underline{\underline{\frac{1}{27} R^3 \pi}};$$

$$A_{FOI} = FO \cdot (FO + FI) \cdot \pi = \frac{2\sqrt{3}}{3} R \cdot \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} R + \frac{4}{3} R \right) \cdot \pi = \underline{\underline{\frac{12 + 8\sqrt{3}}{9} R^2 \pi}}; \quad A_{AIH} = \frac{1}{4} A_{FOI} = \underline{\underline{\frac{3 + 2\sqrt{3}}{9} R^2 \pi}}.$$